

University of Groningen

## Quasicrystals, aperiodicity and lattice systems

Hof, Albertus

**IMPORTANT NOTE:** You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.

*Document Version*

Publisher's PDF, also known as Version of record

*Publication date:*

1992

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database](#)

*Citation for published version (APA):*

Hof, A. (1992). *Quasicrystals, aperiodicity and lattice systems*. s.n.

### Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

The publication may also be distributed here under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license. More information can be found on the University of Groningen website: <https://www.rug.nl/library/open-access/self-archiving-pure/taverne-amendment>.

### Take-down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): <http://www.rug.nl/research/portal>. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.

## Samenvatting

Quasikristallen vormen een nieuwe klasse van materialen. De ontdekking van de eerste quasikristallen werd bekend gemaakt in 1984 [1]. Het waren legeringen van aluminium met mangaan, ijzer of chroom. Die ontdekking heeft opzien gebaard, zoals bijvoorbeeld blijkt uit het feit dat er inmiddels honderden publikaties over quasikristallen zijn verschenen. Ook populariserende bladen als *Scientific American* en *La Recherche* hebben aandacht besteed aan deze materialen [2-5]. Tegenwoordig kent men tientallen quasikristallen.

Wat quasikristallen zo bijzonder maakt ligt eigenlijk al in hun naam besloten: in bepaald opzicht lijken ze op kristallen, maar dat zijn ze niet. Ze lijken op kristallen omdat ze een eigenschap hebben die tot hun ontdekking karakteristiek geacht werd voor kristallen. Die eigenschap openbaart zich bij zogenaamde diffractie experimenten.

Diffractie experimenten vormen de belangrijkste methode om de atomaire structuur van materialen te onderzoeken. De uitkomst van een diffractie experiment is een plaatje dat diffractiespectrum wordt genoemd. Bij kristallen bestaat dat plaatje uit scherpe, heldere stippen op een donkere achtergrond. De relatieve grootte en de posities van die stippen bevatten informatie over de structuur van het kristal. Dat het diffractiespectrum uit stippen bestaat is een kenmerk van orde. Bij kristallen bestaat die orde uit de periodiciteit van de atomaire structuur: er is een groepje atomen dat zich periodiek herhaalt (zoals bijvoorbeeld de tegels in een denkbeeldig trottoir dat zich naar alle kanten oneindig ver uitstrekt). Omgekeerd nam men aan dat alleen kristallen, dat wil zeggen materialen met een periodieke atomaire structuur, een diffractiespectrum hebben dat uit stippen bestaat.

Het bijzondere van quasikristallen is nu dat ook hun diffractiespectrum uit stippen bestaat, terwijl hun atomaire structuur *niet* periodiek is! Dat quasikristallen geen periodieke structuur hebben volgt uit hun diffractiespectrum: het vertoont een symmetrie die niet kan voorkomen bij kristallen. Omdat bekend is dat materialen met een geheel onregelmatige structuur een diffractiespectrum zonder stippen hebben, moeten quasikristallen een min of meer regelmatige atomaire structuur hebben. Maar die kan dus niet periodiek zijn. De structuur van

quasikristallen is 'aperiodiek'. In een quasikristal liggen groepjes atomen niet als tegels in een trottoir, maar als tegels in een zogenaamde Penrose betegeling.

De Penrose betegelingen zijn een beroemd voorbeeld van een regelmatige maar niet periodieke structuur [6]. Ze dragen de naam van Roger Penrose, de wiskundige die ze in 1974 heeft geconstrueerd. De omslag van dit proefschrift toont een stukje van een Penrose betegeling. Penrose betegelingen zijn aperiodiek in de volgende zin: als men een Penrose betegeling verschuift, dan valt de verschoven betegeling voor geen enkele verschuiving met de oorspronkelijke betegeling samen. Bij een periodieke betegeling daarentegen—het denkbeeldige trottoir, een (oneindig) schaakbord—kan een verschoven betegeling wel met de oorspronkelijke samenvallen. Het blijkt dat Penrose betegelingen een bruikbaar twee-dimensionaal model voor quasikristallen vormen.

Het eerste hoofdstuk van dit proefschrift gaat over quasikristallen. Het geeft een overzicht van wat men weet over quasikristallen en van de vragen die door hun bestaan worden opgeworpen. Men zou bijvoorbeeld willen weten waarom quasikristallen bestaan, hoe hun atomaire structuur er precies uitziet, en hoe hun eigenschappen het beste kunnen worden beschreven. Hoofdstuk 1 legt uit waarom dit moeilijke vragen zijn. Eigenlijk is de reden steeds dezelfde: dat de structuur van quasikristallen aperiodiek is.

Periodiciteit speelt een belangrijke rol in allerlei fysische modellen, bijvoorbeeld in de zogenaamde roostersystemen (de 'lattice systems' uit de titel van dit proefschrift). Het bekendste roostersysteem is het zogenaamde Ising model. Dit is een model voor magnetisch gedrag dat verklaart hoe magnetisatie kan ontstaan uit interactie tussen atomen. Het idee achter het Ising model is het volgende. Stel men zet kleine magneetjes op het vierkante rooster (zeg maar: op de hoekpunten van de velden van een oneindig groot schaakbord). De magneetjes hebben de neiging om dezelfde kant op te wijzen als hun directe burens. Men kan nu laten zien dat de magneetjes allemaal dezelfde kant op gaan wijzen als die neiging sterk genoeg is. Zo verklaart het Ising model hoe magnetisatie (het dezelfde kant op wijzen van alle magneetjes) kan ontstaan uit de interactie tussen atomen (de neiging van de magneetjes om dezelfde kant op te wijzen).

Zoals gezegd is het Ising model slechts een voorbeeld van een roostersysteem. Er bestaat een hele theorie van roostersystemen, die sterk wiskundig van aard is. Daarin ligt aan een roostersysteem steeds een periodiek rooster ten grondslag. In het eerder genoemde voorbeeld was dat het vierkante rooster. Het kan echter ook een ander periodiek rooster zijn, bijvoorbeeld een periodiek rooster in drie dimensies. Zo speelt periodiciteit een heel centrale rol in de theorie van roostersystemen. De periodiciteit van het rooster wordt gebruikt in allerlei bewijzen.

Eigenschappen van quasikristallen kunnen natuurlijk niet zo maar beschreven

worden met een roostersysteem op een periodiek rooster, zoals het vierkante rooster. De structuur van quasikristallen is immers aperiodiek. Daarom zou men roostersystemen moeten bestuderen waarin de aperiodieke structuur van quasikristallen is verwerkt. Het ligt dan voor de hand om te kijken naar roostersystemen op Penrose betegelingen. Zo krijgt men een Ising model op een Penrose betegeling door de magneetjes op de hoekpunten van de 'tegels' van een Penrose betegeling te plaatsen. Er bestaan verscheidene artikelen over Ising modellen op Penrose betegelingen. Daaruit blijkt dat het Ising model op een Penrose betegeling zich althans in bepaalde opzichten net zo gedraagt als het Ising model op het vierkante rooster. Er was echter niet geprobeerd om de hele theorie van roostersystemen op het vierkante rooster te ontwikkelen voor roostersystemen op Penrose betegelingen. Gezien het belang van periodiciteit in de theorie van roostersystemen op periodieke roosters spreekt het beslist niet vanzelf dat dat mogelijk is. Het is echter interessant om te weten hoever men kan komen: vanwege mogelijke fysische toepassingen, vanuit wiskundig oogpunt, en vanwege het feit dat uitspraken over roostersystemen onbetrouwbaar zijn als ze niet ondersteunt worden door een theorie die wiskundig correct is. Dit nu is het onderwerp geweest van het onderzoek dat heeft uitgemondd in dit proefschrift. Een belangrijk deel van dat onderzoek is beschreven in een recent verschenen artikel [7]. De resultaten ervan worden samengevat in Hoofdstuk 3.

Periodiciteit is dus niet zo essentieel voor de theorie van roostersystemen als men op het eerste gezicht misschien zou denken. Maar het is helaas niet gelukt om de gehele theorie van roostersystemen over te dragen op aperiodieke roosters. Men stuit namelijk toch op aanzienlijke problemen. Naar alle waarschijnlijkheid zijn die inherent aan aperiodieke roostersystemen. Ze hebben tot gevolg dat men zich enorme moeite moet getroosten om bepaalde resultaten te verkrijgen die in roostersystemen op periodieke roosters eenvoudig te bewijzen zijn. Hoofdstuk 6 van dit proefschrift behandelt zo'n probleem.

De theorie die in dit proefschrift wordt beschreven is een generalisatie van de bestaande theorie, die van roostersystemen op periodieke roosters. Zij kan ook worden toegepast op roostersystemen op periodieke roosters waarin een bepaalde vorm van aperiodiciteit aanwezig is. Dit wordt onder andere uitgewerkt in Hoofdstuk 5. Verder moet worden opgemerkt dat de resultaten zeker niet alleen gelden voor roostersystemen op Penrose betegelingen. Ze gelden voor roostersystemen op een hele klasse van betegelingen die bepaalde eigenschappen met de Penrose betegelingen gemeen hebben. Deze klasse wordt besproken in Hoofdstuk 2.

Hoofdstuk 4 tenslotte behandelt een stelling die fundamenteel is voor de ontwikkeling van de theorie van roostersystemen op aperiodieke roosters. Deze stelling wordt hier zo geformuleerd dat hij ook bruikbaar is buiten de theorie van roostersystemen. Dat wordt met een aantal voorbeelden geïllustreerd. Het

meest interessante voorbeeld wordt beschreven in Paragraaf 4.3. Het draagt bij aan een beter begrip van diffractie.

## Referenties

- [1] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J.W. Cahn. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Physical Review Letters*, 53:1951–1953, 1984.
- [2] D.R. Nelson. Quasicrystals. *Scientific American*, augustus 1986, 32–41.
- [3] P.W. Stephens and A.I. Goldman. The structure of quasicrystals. *Scientific American*, april 1991, 24–31.
- [4] D. Gratias. Les quasi-cristaux. *La Recherche*, 17:788–798, 1986.
- [5] K.X. Kuo. Les plus simples des quasi-cristaux. *La Recherche*, 18:1406–1408, 1987.
- [6] M. Gardner. Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tilings. *Scientific American*, januari 1977, 110–121.
- [7] C.P.M. Geerse and A. Hof. Lattice gas models on self-similar aperiodic tilings. *Reviews in Mathematical Physics*, 3:163–221, 1991.